

Equazioni lineari

Formulario

Che cos'è un'equazione

Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni che contiene una o più **incognite** (di solito x). **Risolvere** un'equazione significa trovare il valore (o i valori) dell'incognita che rendono l'uguaglianza vera: questo valore si chiama **soluzione**.

In questo formulario ci occupiamo delle **equazioni di primo grado in una sola incognita**, cioè equazioni in cui x compare con esponente 1 (mai x^2 , x^3 , ...) e non ci sono altre lettere oltre a x .

Esempio

$2x + 3 = 7$ è un'equazione di primo grado. Sostituendo $x = 2$:

$$2 \cdot 2 + 3 = 7.$$

Quindi $x = 2$ è la soluzione.

Primo principio: addizione e sottrazione

Si può **aggiungere o sottrarre** uno stesso numero (o espressione) a entrambi i membri senza cambiare le soluzioni:

$$A = B \iff A + C = B + C.$$

Da questo principio derivano due tecniche pratiche che usi continuamente.

Il trasporto

Un termine **cambia segno** quando passa da un membro all'altro.

Esempio

Risolvi $5x + 3 = 4x + 9$.

Passo 1 — porto i termini con x a sinistra (trasporto $4x$, cambia segno):

$$5x - 4x + 3 = 9.$$

Passo 2 — porto i numeri a destra (trasporto $+3$, cambia segno):

$$5x - 4x = 9 - 3.$$

Passo 3 — raccolgo:

$$x = 6.$$

La cancellazione

Se lo stesso termine compare in entrambi i membri, si può **cancellare**.

Esempio

$$4x + 7 = 2x + 7 \implies 4x + \cancel{7} = 2x + \cancel{7} \implies 4x = 2x \implies 2x = 0 \implies x = 0.$$

Attenzione

Si possono cancellare solo termini **uguali** che compaiono in entrambi i membri con lo stesso segno. Non si cancellano fattori all'interno di prodotti o frazioni senza ragionare attentamente.

Secondo principio: moltiplicazione e divisione

Si può **moltiplicare o dividere** entrambi i membri per uno stesso numero **diverso da zero** senza cambiare le soluzioni:

$$A = B \iff A \cdot C = B \cdot C \quad (C \neq 0).$$

Il caso più frequente è dividere entrambi i membri per il coefficiente dell'incognita.

Esempio

Risolvi $3x = 12$.

Passo 1 — divido entrambi i membri per 3 (coefficiente di x):

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}.$$

Passo 2 — semplifico:

$$x = 4.$$

Attenzione

Non si può mai moltiplicare o dividere per **zero**: la divisione per zero non è definita e la moltiplicazione per zero annullerebbe entrambi i membri, perdendo ogni informazione sull'incognita.

Equazioni con frazioni

A volte x compare al numeratore di una frazione. In questi casi potete: separare prima le frazioni che hanno una somma al numeratore, ricondurre tutto allo stesso denominatore usando il **minimo comune multiplo** (m.c.m.), e infine risolvere come una normale equazione di primo grado.

Esempio

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 2.$$

Passo 1 — separo la frazione con la somma al numeratore:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} = 2.$$

Passo 2 — calcolo il m.c.m. dei denominatori. I denominatori sono 2 e 3, quindi m.c.m. = 6:

$$\frac{3x + 2x + 2}{6} = \frac{12}{6}.$$

Passo 3 — semplifico i denominatori e risolvo:

$$3x + 2x + 2 = 12 \implies 5x = 10 \implies x = 2.$$

Equazioni determinate, indeterminate e impossibili

Dopo aver semplificato, un'equazione lineare può avere tre esiti:

- **Determinata:** ha una sola soluzione. Si ottiene $x = k$ con k numero.
- **Indeterminata:** ha infinite soluzioni. Dopo aver semplificato rimane:

$$\boxed{0 = 0} \quad (\text{uguaglianza sempre vera}).$$

- **Impossibile:** non ha soluzioni. Dopo aver semplificato rimane:

$$\boxed{a = b \text{ con } a \neq b} \quad (\text{uguaglianza sempre falsa}).$$

Esempio

Determinata: $3x + 1 = 7 \implies 3x = 6 \implies x = 2$ (una soluzione)

Esempio

Indeterminata: Risolvi $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Passo 1 — distribuisco a destra:

$$2x + 4 = 2x + 4.000$$

Passo 2 — trasporto tutto a sinistra:

$$2x - 2x + 4 - 4 = 0 \implies 0 = 0.$$

L'uguaglianza $0 = 0$ è **sempre vera**, qualunque valore si dia a x . L'equazione ha **infinite soluzioni**: qualsiasi numero reale va bene.

Esempio

Impossibile: Risolvi $x + 5 = x + 3$.

Passo 1 — trasporto x a sinistra e i numeri a destra:

$$x - x = 3 - 5 \implies 0 = -2.$$

L'uguaglianza $0 = -2$ è **sempre falsa**, indipendentemente dal valore di x .
L'equazione è **impossibile**: non esiste nessun numero che la soddisfi.

Equazioni e problemi

Molti problemi si risolvono traducendo il testo in un'equazione. La procedura è sempre la stessa:

1. **Leggi** il problema e individua la grandezza incognita.
2. **Assegna** un nome all'incognita (di solito x).
3. **Traduci** la condizione del problema in un'equazione.
4. **Risolvi** l'equazione.

Esempio

Problema: Il doppio di un numero aumentato di 5 è uguale a 17. Trova il numero.

Chiamo x il numero. La condizione si traduce in:

$$2x + 5 = 17 \implies 2x = 12 \implies x = 6.$$